Examen du cours 2.33.1 : Calculabilité dans les systèmes multi-agents.

On considère un réseau constitué de n agents notés $1, \ldots, n$ et la classe des algorithmes symétriques sur ce réseau (tous les agents ont le même algorithme local). En particulier, un agent ne peut pas utiliser son identité (réseau anonyme).

On suppose que chaque agent i possède une valeur initiale entière $v_i \in \mathbb{Z}$. L'objectif est de résoudre *le problème de la moyenne*, c'est-à-dire de construire un algorithme dans lequel chaque agent calcule *en temps fini* ou *asymptotiquement* la moyenne des valeurs initiales, i.e.,

$$\frac{v_1 + \cdots + v_n}{n}.$$

Partie I

Dans un premier temps, on suppose que le graphe de communication est un graphe simple[1] fixe $G = ([n], E)$ symétrique, connexe et avec une auto-boucle à chaque nœud.

Question I.1. Donner un algorithme qui permet à chaque agent de calculer la moyenne des valeurs initiales en temps fini.

Question I.2. Préciser les différents éléments calculés au cours de cet algorithme (graphe auxiliaire, système linéaire à résoudre, ...) dans l'exemple du graphe symétrique de la Figure 1. Quel est le temps de stabilisation dans cet exemple ?

Question I.3. Est-il possible de calculer, non pas la moyenne mais la somme des valeurs initiales ? Si oui, justifiez votre réponse ; sinon, quelle hypothèse supplémentaire permet de calculer cette somme à partir de l'algorithme précédent ?

Dans la question ci-dessous (ainsi que dans la question II.3), on suppose que le réseau possède un unique leader i, i.e., on considère la valuation ν_i :

$$\nu_i(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in [\,n\,] \setminus \{i\} \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Question I.4. Est-ce possible de calculer la somme des valeurs initiales dans G_{ν_i} ?

Partie II

On garde les mêmes hypothèses que précédemment sur le graphe de communication $G = ([n], E)$ mais on ne veut effectuer maintenant que le calcul asymptotique de la moyenne (et non en temps fini). Pour cela, on propose d'utiliser le schéma algorithmique *EqualNeighbor*.

[1] par opposition à un multi-graphe.

Question II.1. Montrer que la i-ème composante du vecteur de Perron de la matrice stochastique associée à l'exécution de l'algorithme *EqualNeighbor* sur le graphe G est égale à

$$\pi_i = \frac{d_i}{|E|},$$

où d_i est le degré entrant (ou sortant) du nœud i dans le graphe G.

Question II.2. Décrire l'algorithme complet de calcul asymptotique de la moyenne (variables utilisées avec leur initialisation, fonctions d'émission et de transition, ...). Montrer la correction de cet algorithme.

Question II.3. En déduire un algorithme qui calcule asymptotiquement la somme des valeurs initiales lorsque G possède un unique leader.

Question II.4. Donner une hypothèse supplémentaire permettant de calculer la moyenne en temps fini à partir de ce calcul asymptotique.

Partie III

Dans cette dernière partie, on suppose toujours que la topologie est un graphe de communication *fixe* $G = ([n], E)$ mais on ne suppose plus que G est symétrique.

Question III.1. Montrer qu'aucun algorithme de moyenne (averaging algorithm) ne permet de calculer asymptotiquement la moyenne dans G.

Pour chaque nœud $i \in [n]$, on note d_i^+ et d_i^- le degré entrant et le degré sortant[2] de i. On considère alors l'algorithme distribué appelé *Push-Sum* dans lequel chaque agent i a une variable x_i initialisée à v_i et qui, à chaque round t :

1. envoie à chacun de ses voisins sortants dans G (y compris à lui-même) la valeur courante de x_i divisée par d_i^- ;
2. adopte ensuite comme nouvelle valeur pour x_i la somme des valeurs qu'il a reçues dans le round t.

Question III.2. Pourquoi l'algorithme *Push-Sum* est *a priori* un bon candidat pour le calcul de la moyenne ?

Question III.3. Quelle fonction des x_i reste invariante au cours de toute exécution ?

Question III.4. Quelle matrice P peut-on associer à une exécution de l'algorithme *Push-Sum* dans le graphe G ? Quelle propriété cette matrice satisfait-elle ?

[2] L'auto-boucle en i est décomptée à la fois dans d_i^+ et d_i^-.

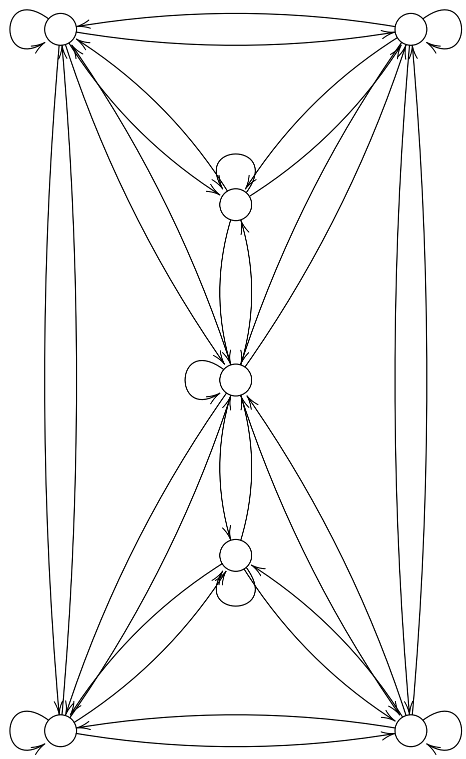

Figure 1: Graphe symétrique à 7 nœuds

QUESTION III.5. Montrer que chaque variable x_i est convergente. L'algorithme *Push-Sum* résout-il le consensus asymptotique ?

QUESTION III.6. Décrire complètement un algorithme de calcul asymptotique de la moyenne (variables utilisées avec leur initialisation, fonctions d'émission et de transition, ...) à partir de l'algorithme *Push-Sum*.

QUESTION III.7.(*) Montrer que cet algorithme calcule aussi la moyenne des valeurs initiales dans un réseau dynamique si celui-ci est fortement connexe en temps fini.

<u>Indication :</u> on pourra commencer par montrer que, pour tout vecteur non nul $x \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées positives et pour toute matrice A positive à diagonale strictement positive, i.e.,

$$\forall i, j \in [\,n\,], \quad A_{i,j} \geqslant 0 \text{ et } A_{i,i} > 0,$$

la matrice

$$B = [\mathrm{diag}(y)]^{-1} A \ [\mathrm{diag}(x)]$$

où $y = Ax$ est une matrice stochastique.