Rappels sur les langages réguliers temporisés

0. Automates sans epsilon trop faibles
00. Automates déterministes trop faibles
1. Clos par $\cap \quad \cup \quad \cdot \quad ^* \quad \underline{R}(\ )$
11. Non-clos par complément
2. Décidable: $\to L(A) = \emptyset$? $L(A) \cap L(B) = \emptyset$? $w \in L(A)$ pour w sympa
22. Indécidable: $\hookrightarrow L(A) =$ tout ? $L(A) = L(B)$? $L(A) \subset L(B)$

(prouvé en utilisant deux théorèmes importants d'Alur et Dill)

Théorème 1 :
étant donné A temporisé on peut construire B fini
tel que L(B)=untime L(A)

Théorème 2:
étant donné A temporisé il est indécidable de
savoir si L(A) est universel

Objectifs aujourd'hui:
- comprendre l'idée de preuve des deux théorèmes
- comprendre quelques approches à la décidabilité/indécidabilité des problèmes sur des systèmes de transitions infinis

Rappel: outil iprincipal pour prouver Thm 1 – bisimulation

soit S, L, Δ un syst de trans
états, etiqs, trans

une relation $\simeq$ d'équiv sur S est une bisimulation

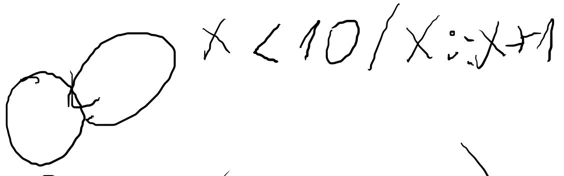
si $\forall$

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r, "a"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & p' \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
q \arrow[r, "a"] & q'
\end{tikzcd}$$

on trouve un $q' \simeq p'$ t.q.

(pour tout 3 machins rouges on peut insérer un bleu)

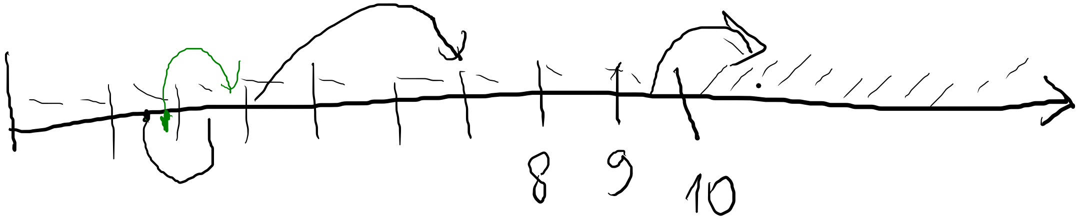
Bisimulation - exemples



$S = \mathbb{R}_+$ (ou $\mathbb{N}$)

$\Delta = x \to x+1$ (si $x<10$

existe-t-il une bisim finie
(avec un nbre fini de classes

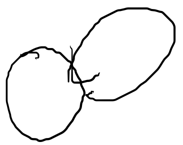


>10	$\Rightarrow$	pas de trans
9 à 10	$\Rightarrow$	1 trans
8 à 9	$\Rightarrow$	2 tr
7 à 8	$\Rightarrow$	3 tr
...		
0 à 1	$\Rightarrow$	9 tr

classes d'équiv: $[0,1)$, $[1,2)$ ... $[0,9]$, $[10,\infty)$

$x \simeq y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} [x] = [y] \vee (x \geq 10 \wedge y \geq 10)$

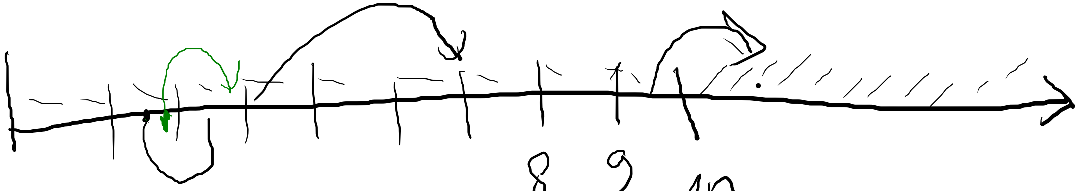
Bisimulation - exemple 1 - on trouve une bisimulation finie



$S = \mathbb{R}_+$ (ou $\mathbb{N}$)

$\Delta = x \to x+1$ (si $x<10$)

existe-t-il une bisim finie (avec un nbre fini de classes



$>10 \Rightarrow$ pas de traps

9 à 10 $\Rightarrow$ 1 traps

8 à 9 $\Rightarrow$ 2 tr

7 à 8 $\Rightarrow$ 3 tr

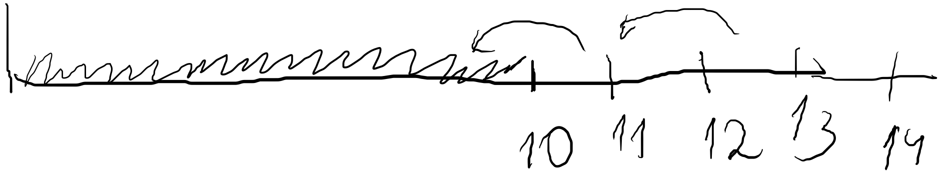
0 à 1 $\Rightarrow$ 9 tr

classes d'équiv : $[0,1)$, $[1,2)$ ... $[0,9)$, $[10,\infty)$

$x \simeq y \overset{def}{\Longleftrightarrow} [x] = [y] \vee (x \geq 10 \wedge y \geq 10)$

Exemple 2 - il n'existe pas de bisimulation finie

$x \to x-1$ si $x > 10$



0 - 10 différent de
10 - 11 dif
11 - 12 dif de
12 - 13 etc

$\Downarrow$

pas de bisim finie.

formaliser la preuve

$$\begin{cases} 10 & \text{ne peut pas faire trans} \\ 11 : & \text{1 seule fois et pas plus} \\ 12 : & \text{2 fois} \\ 13 : & \text{3 fois} \\ 10+k : & k \text{ fois} \end{cases}$$

tous non-équivalents pour n'importe laquelle relation de bisimulation

$\Downarrow$

toute bisim a un nbre infini de classes

Vers la bisim de région pour les aut temp

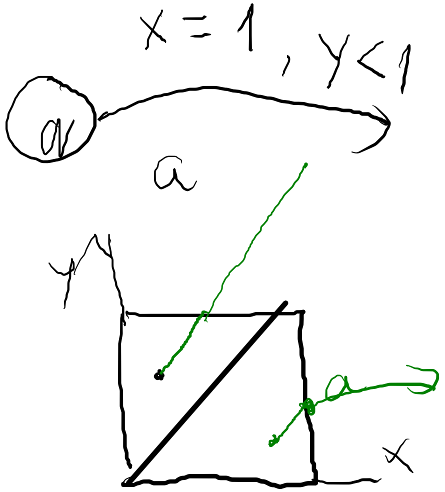
(on découvre ce qu'elle doit distinguer et pourquoi)

1) si $x<3$ et $x'>3$ alors $(q,x) \not\approx (q,x')$

ne peut pas faire — peut faire a

2) si $1>x>y>0$ et $0<x'<y'<1$ alors $(q,x,y) \not\approx (q,x',y')$

peut — peut pas



3) si $p \neq q$ alors $(p,x) \not\approx (q,x')$

déf On définit l'équivalence de régions pour TA

$(p,\vec{x}) \approx (p',\vec{x}')$

si

1) $x_i > c \Leftrightarrow x'_i > c$ (pour chaque $c \in \mathbb{N}$) $\leq M$

$\quad = \quad\quad\quad =$
$\quad < \quad\quad\quad <$

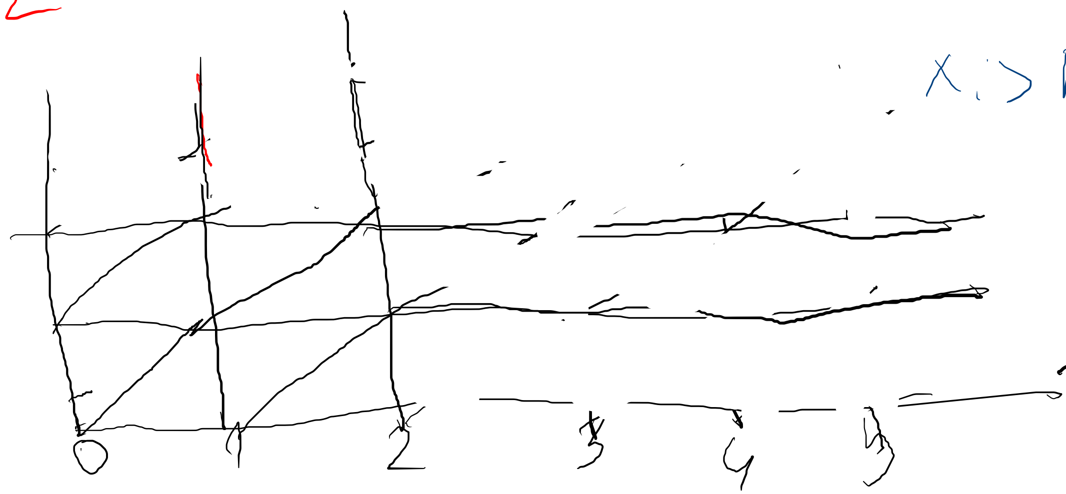
2) $x_i - x_j < c \Leftrightarrow x'_i - x'_j < c$ (pour chaque c de $-M$ à M)

$\quad =$
$\quad >$

3) $p = p'$

- M - le + gde const de A
- on ignore tout pour $x_i > M$

M = 2



$\boxed{x_0 = 0?}$

$x_i > M \Leftrightarrow x'_i > M$

autre façon de dire

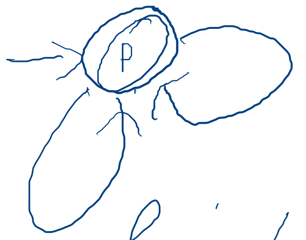
$(p,\vec{x}) \approx (p',\vec{x}')$ si

1) $[x_i] = [x'_i]$ si $< M$

2) $\{x_i\} < \{x_j\} \Leftrightarrow \{x'_i\} < \{x'_j\}$ si $< M$

3) $p = p'$

example - automate de région pour

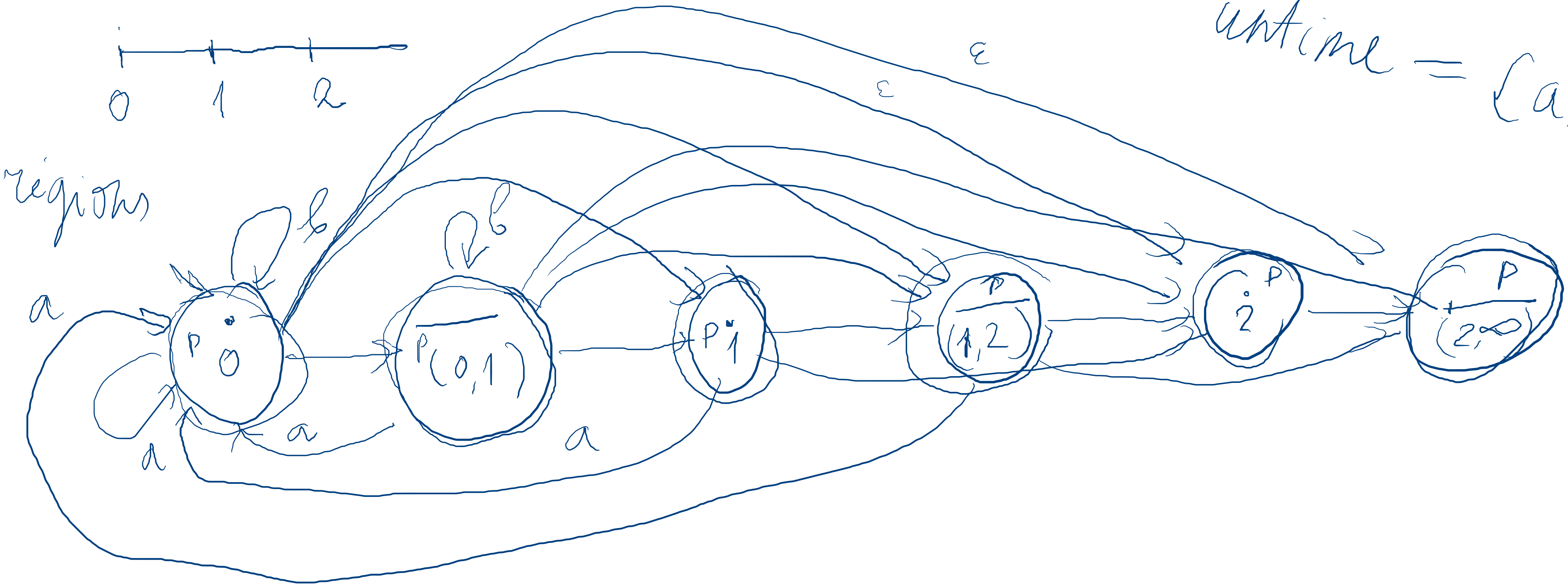


$a, x<2 \,/\, x:=0$

$b, x<1$

$M=2$

régions



$\text{untime} = \{a,b\}^*$