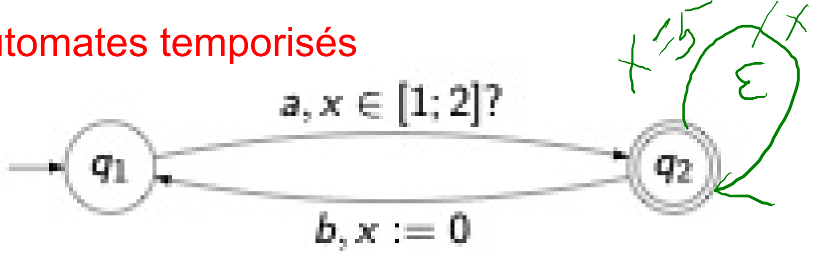
Automates temporisés



Q – ens fini de location Σ alph fini

$\bar{x} = x_1, \dots x_d$ vect d'horloges, valeurs en $\mathbb{R}^d$

Inv : $Q \to$ Contraintes

$\Delta \subset Q \times Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \times \text{Contr} \times \text{Resets}$

Contraintes : conj de $x_i < c$ ($\le, =, >, \ge$) avec $c \in \mathbb{N}$

Reset : $\begin{cases} x'_i = x_i & \text{pour } i \notin P \\ x'_i = 0 & \text{pour } i \in P \end{cases}$

$\forall i : \dot{x}_i = 1$ $\dot{\bar{x}} = \bar{1}$

$\bar{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

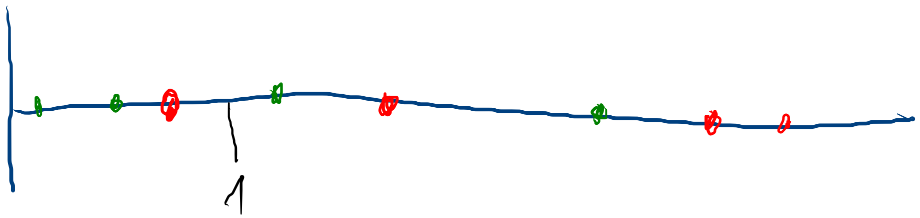
$I, F \subset Q$
init / finals

Variantes
- ε ou pas ε
- dét / non dét
- sur mots finis ou infinis

- $c \in \mathbb{Q}$ pareil (on multiplie par LPCM des dén, on passe aux entiers)
- ~~$c \in \mathbb{R}$ p.ex $\sqrt{2}$~~

Mots temporisés

mots temporisés sur Σ (timed words / time-event sequences)



$t_1 a_1 t_2 a_2 t_3 a_3$ etc $\quad t_i \in \mathbb{R}_+$ délais $\quad t_i = d_i - d_{i-1}$

0.1 a 0.4 a 0.2 b 0.8 a etc $\quad a_i \in \Sigma$ $\quad$ (avec $d_0 = 0$)

autre formes – avec dates

$(a_1, d_1)\ (a_2, d_2), (a_3, d_3) \ldots$ $\quad a_i \in \Sigma$ $\quad 0 \leq d_1 \leq d_2 \leq d_3 \ldots$

sém de TA : Labeled TS (TA)

état $Q \times \mathbb{R}^d$ labels $\Sigma \cup \{\varepsilon\} \cup \mathbb{R}_+$

$\underset{q}{\cup}$ $\underset{x_1 \dots x_d}{\cup}$

trans | délai $(q, \bar{x}) \xrightarrow{t} (q, \bar{x} + t\bar{1})$ si $\forall \tau < t \, (\bar{x} + \tau \models Inv(q))$

saut $(q, \bar{x}) \xrightarrow{a} (q', \bar{x}')$

où existe $(q, q', a, g, r) \in \Delta$

$\bar{x} \models g$, $\bar{x}' = r(\bar{x})$

calcul accepteur $e_1 \xrightarrow{l_1} e_2 \xrightarrow{l_2} \dots \rightarrow e_n$ $\boxed{l_n \in \Sigma}$

si $e_1 = (i, \bar{0})$ avec $i \in I$; $e_n = (f, \bar{x})$ avec $x \in F$

mot accepté $l_1 l_2 \dots l_n$

Langages réguliers temporisés

$L(A) = \{$trace de tous runs accepteurs$\}$

Rq $\quad \xrightarrow{3} \xrightarrow{1.5} \xrightarrow{a} \xrightarrow{b} \xrightarrow{7} \xrightarrow{2.1} \xrightarrow{a} \xrightarrow{\varepsilon}$

trace $\quad 4.5\ a\ 0\ b\ 9.1\ a$

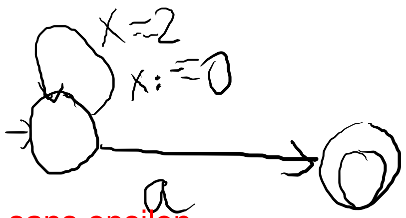
Timed regular languages

L est TRL si $\exists A$ aut temp t.q. $L = L(A)$

ε ou pas ε ?

$L = \{ t\,a \mid t$ entier pair $\}$

avec ε



impossible sans ε

Théorème: avec ou sans epsilon
n'est pas équivalent

preuve du théorème sur epsilon

supposons $L = \{ t\, a \mid t \in 2\mathbb{N} \}$ reconnu par A sans ε

soit M la + gde const ds A

soit $w = 2M\ a$. $w \in L$, reconnu par A

calcul sur w a cette forme

$$(i, \bar{0}) \xrightarrow{2M} (i, 2M \cdot \bar{1}) \xrightarrow{a} (f, \bar{x})$$

$\exists$ trans (i, f, a, g, r) avec $2M \cdot \bar{1} \models g$

soit $w' = 2M+1\ a \notin L$

mais il est accepté par $(i, 0) \xrightarrow{2M+1} (i, 2M+1 \cdot \bar{1}) \xrightarrow{a} (f, x)$

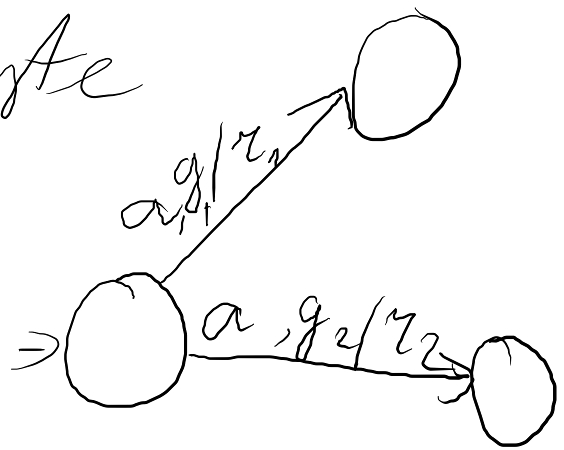
contradiction

dorénavant — TRL avec ε

TA est déterministe

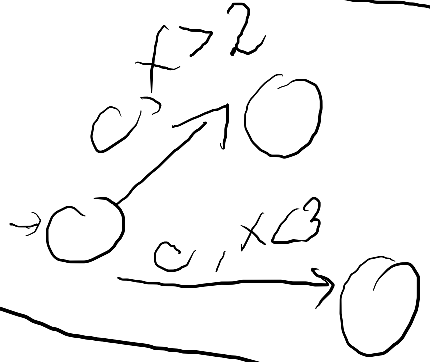
I - un seul état

- n pas de

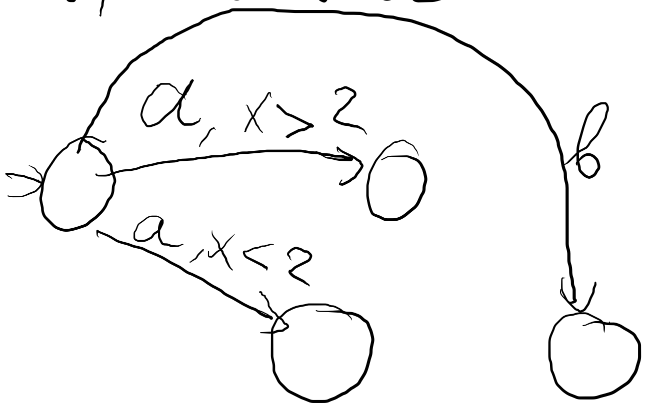


avec $g_1 \wedge g_2$ satisfaisable

ex



non-dét



Propriétés principales des langages réguliers temporisés

Propriété des TRL

1) expressivité
- les automates sans ε ne peuvent pas reconnaître $\forall$ TRL
- les aut dét ne peuvent pas reconnaître tous les TRL

Thm 1

2a) si L TRL alors $\mu(L)$ est rég sur Σ

2) TRL clos par $\cup$ $\cap$ $\cdot$ $h(\,)$ *

TRL pas clos par $\overline{}$ (complément)

3) décidable :

$w \in L(A)$? pour w avec délais rat

$L(A) = \emptyset$? $L(A) \cap L(B) = \emptyset$

indécidable !

Thm 2

$L(A) =$ tous les mots ?

$L(A) = L(B)$?

$L(A) \subset L(B)$?

Théorème principal d'Alur et Dill

Thm principal d'A & D

$L = L(A)$ un TRL

alors on peut faire un aut fini

B tel que

$$\mu(L) = L(B)$$

Pour comprendre l'énoncé des propriétés

opérations sur les mots tempo

concaténation $\cdot$

$5a4b \cdot 3.2a\,7.5b = 5a4b\,3.2a\,7.5b$

untiming $\quad \mu(5a4b) = ab$

renaming $\quad h: \begin{array}{l} a \mapsto c \\ b \to c \\ c \to a \end{array}$ $\qquad h(4a5b3c) = 4c5c3a$

se propagent aux langages

$L^k = \underbrace{L \cdot L \cdot L \cdots L}_{k}$ $\qquad L^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k$

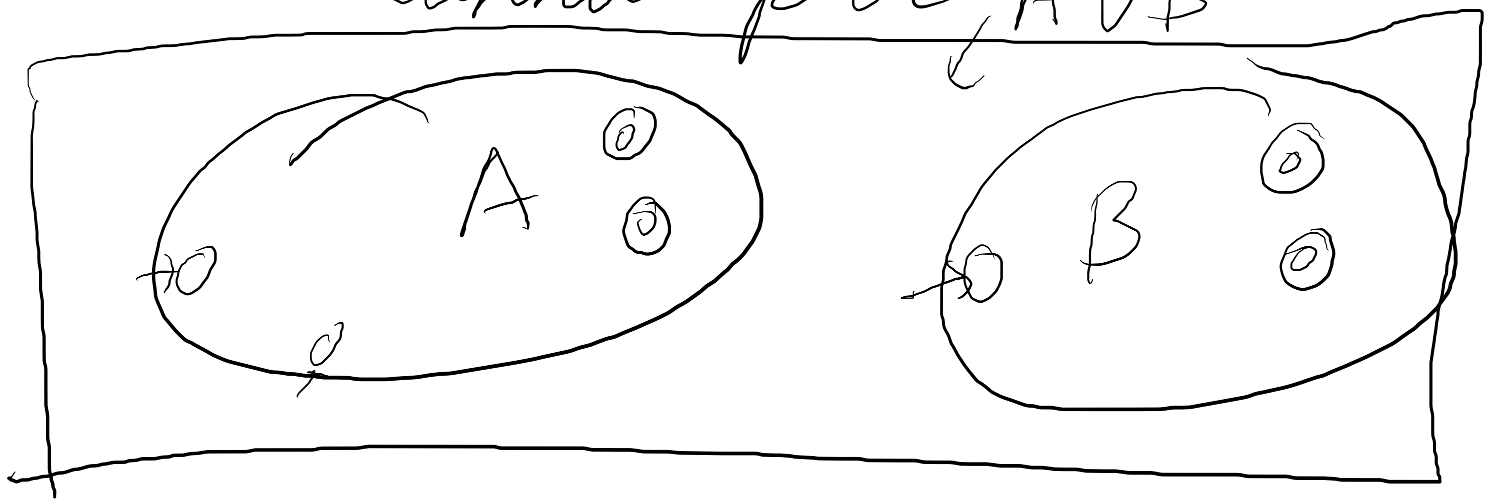
Principe de preuve des propriétés de cloture

Choses faciles

$\cup$

$L(A) \cup L(B)$

reconnu par $A \cup B$



$\cap$

$L(A) \cap L(B)$ reconnu par $A \times B$

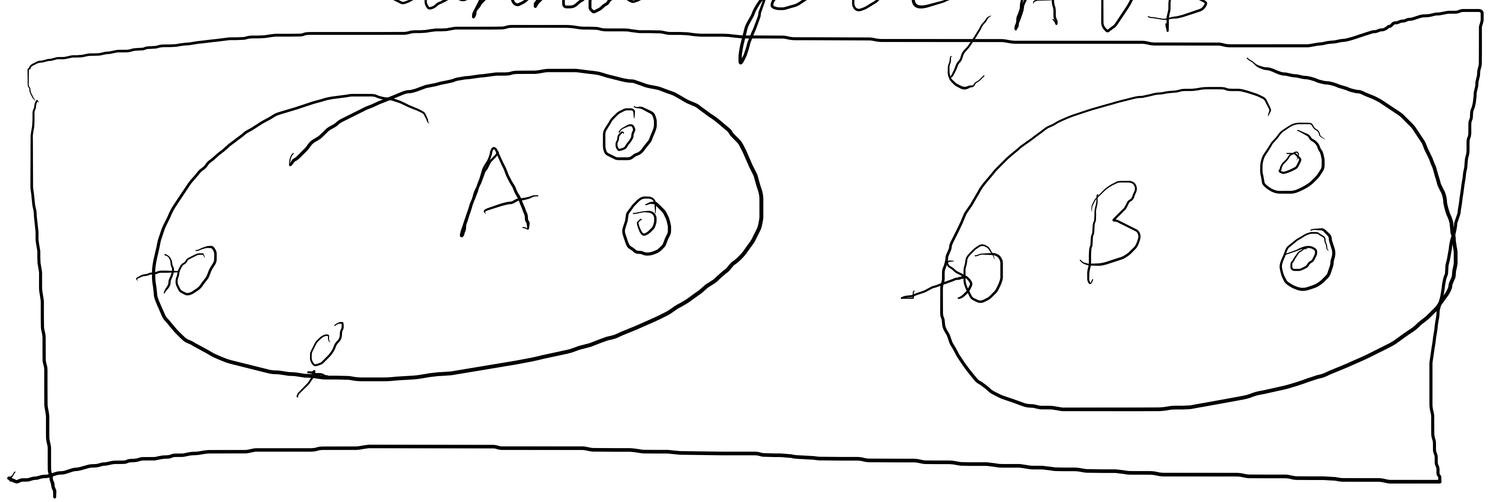
2 jeux distincts d'horloges, réfléchissez

Principe de preuve des propriétés de cloture

Choses faciles

$\cup$ $\quad L(A) \cup L(B)$

reconnu par $A \cup B$

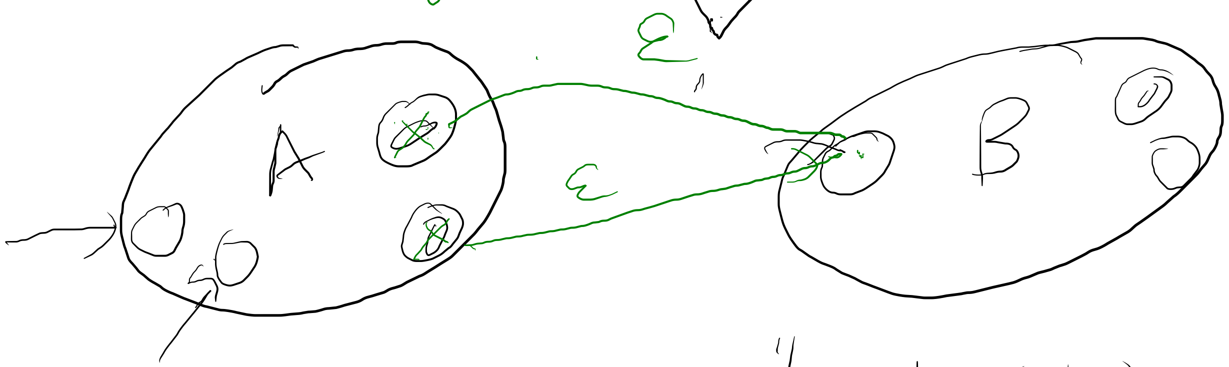


$\cap$ $\quad L(A) \cap L(B)$ reconnu par $A \times B$

2 jeux distincts d'horloges, réfléchissez

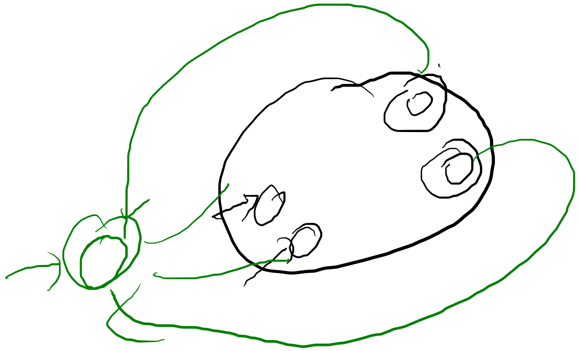
suite

rendre urgent, horloges de B à 0



reconnaît $L(A) \cdot L(B)$

$L(A)^+$ on boucle,

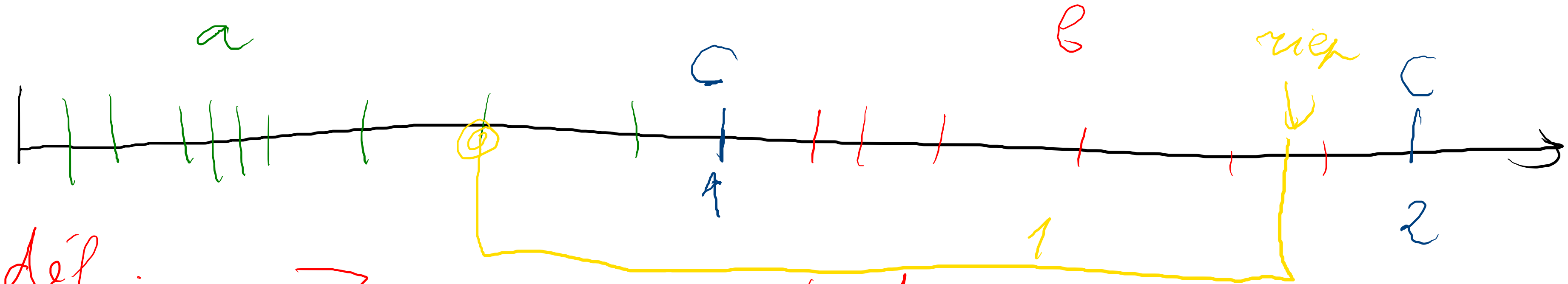


réfléchissez sur les détails

Langage non-complémentable, non-déterminisable

Thm. exemple de L timed reg avec $\bar{L}$ non timed reg

Corollaire cet L ne peu pas être reconnu par un TA dét



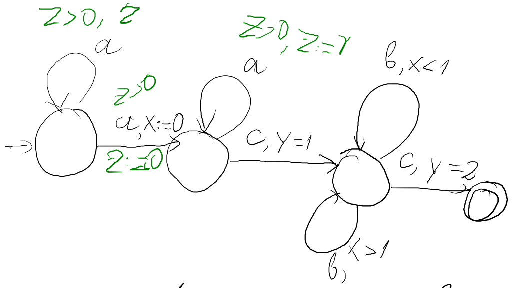
déf du langage L :

$\exists$ un a. t.q. 1 sec + tard il n'y a pas de b

(a ne doivent pas coïncider ds le temps)

Langage non-complémentable, automate + idée de preuve

$L(A) = L$



- L est Timed regular
- $\overline{L}$: " 1 sec après chaque a il y a un b " → mots mal formés

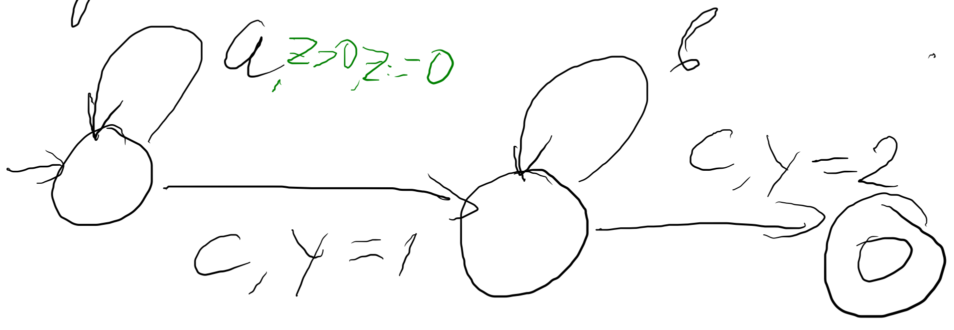
il faut un nbre non-borné d'horloges

preuve de non-complementabilité

prouvons que $\bar{L}$ non-TRL

soit M lang de mots 'bien formés'

$M = L($



$)$

supposons $\bar{L}$ est TRL

$M \cap \bar{L}$: mots bien formés, 1 sec après chaque a il y a b

$u(M \cap \bar{L}) = \{ a^n c\, b^m c \mid m \geq n \}$ non-rég.

contradiction!

propriétés de décidabilité dépendent de 2 théorèmes

2 thms à démontrer (Alur & Dill)

1) pour L Timed reg $\mu(L)$ est reg

Algo : on obtient un aut pour $\mu(L)$ à partir de TA pour L

2) pour A un TA $L(A) = \text{tout}$ est indécidable

---

algos de décision en admettant 1)

$L(A) = \emptyset$?

- construire B aut fini pour $\mu(L(A))$
- tester si $L(B) = \emptyset$.

$L(A) \cap L(B) = \emptyset$?

- construire $A \times B$.
- tester le vide

problèmes de décision, suite (cas décidables)

tester $w \in L(A)$? soit $w = t_1 a_1 t_2 a_2 t_3 a_3 \quad t_n a_n$

avec $t_i \in Q$

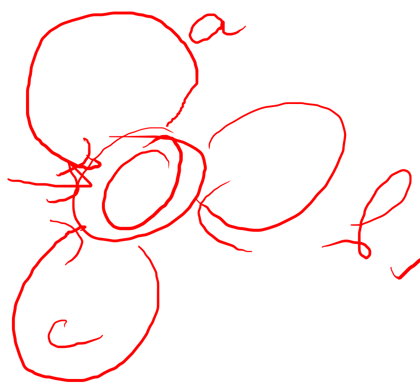
TA A_w t.q. $L(A_w) = \{w\}$

$$\to \bigcirc \xrightarrow[x:=0]{a_1, x=t_1} \bigcirc \xrightarrow[x:=0]{a_2, x=t_2} - - - - - - \xrightarrow[x:=0]{a_n \ x=t_n} \bigcirc$$

$$w \in L(A) \iff L(A_w) \cap L(A) \neq \emptyset$$

on sait le tester

prouvons que $L(A) = L(B)$? indéc.

oui, parce que $L(A) = L\Big($ 

$\Big)$

$$\Updownarrow$$

$L(A) = \text{tout}$

or par Thm 2) c'est indéc.

C'est tout concernant lers propriétés de base
des langages temporisés réguliers, mais il
nous reste deux théorèmes d'Alur à prouver

Outil important : bisimulation

soit S, L, Δ un syst de trans
· états, étiqs, trans

une relation $\sim$ est une bisimulation d'équiv sur S

si $\forall$

$$\begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{a} & p' \\ \wr & & \wr \\ q & \xrightarrow{a} & q' \end{array}$$

on trouve un $q' \sim p'$. t.q.

(pour tout 3 machins rouges on peut insérer un bleu)